ANÁLISIS II: EXAMEN PARCIAL 2

Sólo hay que resolver 5 de los 6 ejercicios

Duración: 2 horas

(**Desarrolla primero los ejercicios que consideres más accesibles.**)

Prueba lo indicado.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que satisface $F(a) < 0 < F(b)$ y $F' > 0$ en $[a, b]$. Considera $\lambda > 0$ y la función auxiliar $f_\lambda(x) = x - \lambda F(x),\ a \le x \le b$. Dado $x_0 \in [a, b]$ observa que $F(x_0) = 0$ si, y sólo si, x_0 es punto fijo de f_λ. Prueba que es posible elegir λ para que $f_\lambda([a, b]) \subseteq [a, b]$ y $f_\lambda : [a, b] \to [a, b]$ sea una contracción.

2. Definamos $F : \mathcal{M}(n) \to \mathcal{M}(n)$ por $F(A) = AA^t$. Entonces F es continua.

3. Sean K un espacio métrico compacto, $\{f_n\} \subseteq C(K)$ y $f \in C(K)$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$, entonces $\{f_n\}$ es equicontinua.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ y $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Determina los vectores $u \neq 0$ tales que la derivada direccional $Df(0; u)$ existe.

5. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ las funciones definidas por

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2),\ x = (x_1, x_2); \\ g(y) &= (3y_1 + 2y_2 + 3y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1),\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

y tomemos $F(x) := g(f(x))$. Encuentra $DF(0)$ y determina si es invertible.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

i) Encuentra Df y Jf.

ii) Bosqueja la imagen bajo f del conjunto $A = [0, 1]\times[0, \pi]$. (Al identificar $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, la función anterior corresponde a $f(z) = e^z$.)

Junio 4, 2021